Влияние магнитного поля и вращения на структуру турбулентности

Казахский национальный университет имени аль - Фараби , Алматы
e-mail: kvt@kazsu.kz

Аннотация

Рассматривается установившееся турбулентное винтовое течение жидкости в круглой цилиндрической трубе, вращающейся относительно своей оси в поперечном магнитном поле. Предлагается полуэмпирическая модель, построенная на основе уравнений для одноточечных моментов второго порядка для полей скорости, для замыкания уравнения Рейнольдса для сдвиговых течений.

Влияние магнитного поля на турбулентность представляет собой интересное явление. Накладывая извне магнитное поле, можно воздействовать на структуру турбулентности, то есть имеется принципиальная возможность получения устойчивого ламинарного течения при больших числах Рейнольдса. Будучи неустойчивыми в отсутствие поля, такие течения в достаточно сильном магнитном поле могут оказаться устойчивыми, и Re_{kp} с ростом поля будет возрастать. Вызывает интерес воздействие магнитного поля на вращающиеся течения электропроводной жидкости. В работе [1] рассматривается такое течение и приведены результаты проведенного эксперимента. Отмечено, что взаимодействие магнитного поля и вращения приводит к появлению периодических колебаний, меняющих свой характер в зависимости от величины прикладываемого поля. Свойства явлений, проявляющихся при воздействии магнитного поля на закрученный поток, могут найти свое применение в различных технических приложениях магнитной гидродинамики. В особенности в устройствах генерации мощного переменного тока, амплитуда и частота которого могут регулироваться изменением параметров потока и внешнего магнитного поля.

Таким образом, возникает необходимость в построении эффективной математической модели, учитывающей вращение потока и влияние внешнего магнитного поля. В работах [2,3] предлагаются полуэмпирические модели, учитывающие влияние поперечного магнитного поля на турбулентную структуру течения в канале прямоугольного сечения.

В настоящей работе предлагается аналогичная модель, основанная на замыкании уравнений Рейнольдса и рассматривается более сложное течение, а именно турбулентное течение жидкости в круглой трубе, вращающейся относительно своей оси с постоянной угловой скоростью ω под влиянием поперечного магнитного поля.

Уравнения для рейнольдсовых напряжений с учетом вращения и магнитных сил представляются в следующем виде:

$$\overline{uv}\,\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho}\,\overline{p\frac{\partial u}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial r}\left[-\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\overline{u^2}}{2} + \overline{v\,\frac{u^2}{2}}\right] + \nu\sum_{k=1}^{3}\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2} - \frac{\nu}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\overline{u^2}}{2} + N\,\overline{u^2} \,=\, 0\,,$$

$$-\frac{1}{\rho}\,\overline{p\,\frac{\partial v}{\partial r}} + \frac{\partial}{\partial r}\left[-\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\overline{v^2}}{2} + \overline{v\,\left(\frac{v^2}{2} + p\right)}\right] + \nu\sum_{k=1}^{3}\overline{\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2} -$$

$$-\nu\left[\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\overline{v^2}}{2} - \frac{\overline{v^2}}{r} - \frac{2}{r^2}\,\overline{v\frac{\partial w}{\partial \varphi}}\right] - 2\omega\,\overline{vw} - \frac{1}{r}\,\overline{vw^2} = 0\,,$$

$$-\frac{1}{\rho r}\overline{p\frac{\partial w}{\partial \varphi}} + \frac{\partial}{\partial r}\left[-\nu\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{\overline{w^2}}{2} + \overline{v\,\frac{w^2}{2}}\right] + \nu\sum_{k=1}^{3}\overline{\left(\frac{\partial w}{\partial x_k}\right)^2} -$$

$$-\nu\left[\frac{1}{r}\,\frac{\overline{\partial w^2}}{\partial r} + \frac{2}{r^2}\,\overline{w\,\frac{\partial v}{\partial \varphi}} - \frac{\overline{w^2}}{r^2}\right] + 2\omega\,\overline{vw} + \frac{1}{r}\,\overline{vw^2} + N\,\overline{w^2} = 0\,, \qquad (1)$$

$$\overline{v^2}\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho}\,\overline{p\,\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial r}\left[-\nu\,\frac{\partial \overline{uv}}{\partial r} + \overline{uv^2} + \frac{1}{\rho}\overline{pu}\right] + 2\,\nu\sum_{k=1}^{3}\overline{\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_k}} -$$

$$-\nu\left[\frac{1}{r}\overline{u\frac{\partial v}{\partial r}} - \frac{\overline{uv}}{r^2} - \frac{2}{r^2}\overline{u\,\frac{\partial w}{\partial \varphi}} + \frac{1}{r}\overline{v\,\frac{\partial u}{\partial r}}\right] - 2\omega\overline{uw} - \frac{1}{r}\overline{uw^2} + N\overline{uv} = 0\,,$$

$$\overline{vw}\,\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho}\,\overline{p\,\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)} + \frac{\partial}{\partial r}\left[-\nu\frac{\partial \overline{uw}}{\partial r} + \overline{uvw}\right] + 2\,\nu\sum_{k=1}^{3}\overline{\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}} -$$

$$-\nu\left[\frac{1}{r}\overline{w\frac{\partial u}{\partial r}} + \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial uw}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\,\overline{uw}\right] + 2\omega\,\overline{uv} + \frac{1}{r}\,\overline{uvw} + 2\,N\,\overline{uw} = 0\,,$$

$$-\frac{1}{\rho}\overline{p\,\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r}\right)} + \frac{\partial}{\partial r}\left[-\nu\,\frac{\partial \overline{vw}}{\partial r} + \overline{v^2w} + \frac{1}{\rho}\overline{pw}\right] + 2\,\nu\sum_{k=1}^{3}\overline{\frac{\partial v}{\partial x_k}\frac{\partial w}{\partial x_k}} -$$

$$-\nu\left[\frac{1}{r}\overline{w\,\frac{\partial v}{\partial r}} + \frac{1}{r^2}\overline{vw} + \frac{2}{r^2}\overline{w\,\frac{\partial w}{\partial \varphi}} + \frac{1}{r}\frac{\overline{\partial vw}}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\overline{vw}\right] -$$

$$-2\omega\,(\overline{w^2} - \overline{v^2}) - \frac{1}{r}\overline{w^3} + \frac{1}{r}\,\overline{v^2w} = 0\,.$$

В первой строке каждого уравнения записаны члены, аналогичные соответствующим членам уравнений для плоской задачи при $\omega = 0$ и сохраняющие тот же физический смысл. Последующие члены являются формальным следствием записи уравнений в цилиндрических координатах. Члены, описывающие влияние на турбулентность ращения потока и магнитного поля, расположены в конце уравнений. Следуя [4], сделаем следующие допущения: пренебрежем диффузией турбулентных пульсаций; в соответствии с этим пренебрежем также третьими моментами пульсационных скоростей; в соответствии с направлением магнитного поля, примем $\overline{vw} = 0$. С учетом гипотез Колмогорова и Ротта:

$$\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) = -k\,\frac{\sqrt{E}}{l}\,\left(\overline{u_i\,u_j} - \frac{2}{3}\,\delta_{ij}\,E\right)\,,$$

$$2\,\nu\,\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \nu\,c_1\,\frac{\overline{u_i\,u_j}}{l^2} + \frac{1}{3}\delta_i j\,\frac{E^{3/2}}{l}$$

система (1) для развитого сдвигового турбулентного течения примет окончательный вид:

$$\overline{uv}\,\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{k}{2}\,\frac{\sqrt{E}}{l}\,\left(\overline{u^2} - \frac{2}{3}\,E\right) + \frac{c}{3}\,\frac{E^{3/2}}{l} + N\,\overline{u^2} = 0\,,$$

$$\frac{k}{2}\,\frac{\sqrt{E}}{l}\,\left(\overline{v^2} - \frac{2}{3}\,E\right) + \frac{2}{3}\,\frac{E^{3/2}}{l} = 0\,,$$

$$\frac{k}{2}\,\frac{\sqrt{E}}{l}\,\left(\overline{w^2} - \frac{2}{3}\,E\right) + \frac{2}{3}\,\frac{E^{3/2}}{l} + N\,\overline{w^2} = 0\,,$$

$$\overline{v^2}\,\frac{\partial U}{\partial r} + k\,\frac{\sqrt{E}}{l}\overline{uv} - 2\omega\,\overline{uw} + N\,\overline{uv} = 0\,,$$

$$k\,\frac{\sqrt{E}}{l}\,\overline{uw} + 2\,\omega\,\overline{uv} + 2\,N\,\overline{uw} = 0\,.$$

Решение системы (2) представляется в следующем виде:

$$\overline{u^2} = l^2\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2\,\Re_1\,, \qquad \Re_1 = \frac{1}{c^{2/3}}\left[(2-p)\psi^2 - \frac{p\,\sqrt{\alpha}\psi^3}{\sqrt{\alpha}\psi + 2\,St}\right]\,,$$

$$\overline{v^2} = l^2\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2\,\Re_2\,, \qquad \Re_2 = \frac{p}{c^{2/3}}\psi^2\,,$$

$$\overline{w^2} = l^2\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2\,\Re_3\,, \qquad \Re_3 = \frac{p\sqrt{\alpha}\psi^3}{\sqrt{\alpha}\psi + 2\,St}\,,$$

$$\overline{uv} = l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 \Re_4 \,, \qquad \Re_4 = \frac{p}{c^{2/3}} \frac{\psi^3 + 2\,St\,\psi^2}{\alpha\,\psi^2 + 3\,St\,\sqrt{\alpha}\psi + 2\,St^2 + 4\,R_\omega^2} \,,$$

$$\overline{uw} = l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)^2 \Re_5 \,, \qquad \Re_5 = \frac{2\,p\,R_\omega\,\psi^2}{\alpha\,\psi^2 + 3\,St\,\sqrt{\alpha}\psi + 2\,St^2 + 4\,R_\omega^2} \,,$$

$$\psi = \left(-\frac{\delta}{2} + \sqrt{\Theta}\right)^{1/3} + \left(-\frac{\delta}{2} - \sqrt{\Theta}\right)^{1/3} - St\,\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \frac{2-p}{m}\right] \,,$$

$$\Theta = \left(\frac{\eta}{3}\right)^3 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 \,, \qquad \delta = 2\,\left(\frac{\theta}{3}\right)^3 - \frac{\theta}{3}\gamma + \zeta \,, \qquad \eta = -\frac{\theta^3}{3} + \gamma \,,$$

$$\theta = 3\,St\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{(2-p)}{m}\right] \,, \qquad \gamma = St^2\left[\frac{2}{\alpha} + \frac{9\,(2-p)}{m\,\sqrt{\alpha}}\right] + \frac{4}{\alpha}\,R_\omega^2 - \frac{3\,p}{m\,\sqrt{\alpha}} \,,$$

$$\zeta = \frac{6}{m\,\alpha}\left[(2-p)\,St^3 + 2(2-p)\,St\,R_\omega^2 - p\,St\right] \,,$$

$$\sqrt{\alpha} = \frac{1}{k^2}\frac{2}{3}\left(1 - \frac{c}{k}\right) \,, \qquad p = \frac{2}{3}\left(\frac{k-2}{k}\right) \,, \qquad m = \frac{c+4}{c^{1/3}} \,.$$

$$R_\omega = \frac{\omega}{\dfrac{\partial U}{\partial r}} \,, \qquad St = \frac{\alpha_*\,\sigma\,B^2\,/\,\rho}{\dfrac{\partial U}{\partial r}} \,,$$

здесь R_ω St - безразмерный параметр вращения и безразмерное число Стюарта, соответственно.

$$k = \sqrt{\frac{c}{k}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c} - 1\right)\right]^{3/4} \,, \qquad c = \left(\frac{c}{k}\right)^{3/2}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{k}{c} - 1\right)\right]^{3/4} \,,$$

где $\dfrac{k}{c} = 7$ устанавливается из теории однородной турбулентности. Эти коэффициенты являются универсальными и не зависят от внешних сил. Построенная модель позволяет получить замкнутые уравнения для характеристик среднего движения и приближенно рассчитать пульсационные характеристики течения вращающейся проводящей жидкости в поперечном магнитном поле.

Список литературы

1 Кебадзе Б.В., Комиссаров Ю.О., Адамовский Л.А. Исследование периодических колебаний в закрученном потоке жидкого металла под воздействием магнитного поля // Магнитная гидродинамика.-1991.-є2.-С.90-95

2 Абдибеков У.С., Маканалина Г.С. Моделирование турбулентного МГД течения // Вестник Националькой инженерной акдемии РК , 2004. Т.11, є1. С.22-27

3 Абдибеков У.С., Маканалина Г.С. Влияние магнитного поля и кривизны канала на турбулентную структуру течения // Вычислительные технологии.-2004.-Т.9, є 3.-С.13-21.

4 Левин В.Б. О стабилизирующем влиянии вращения потока на турбулентность // Теплофизика высоких температур, 1964. Т.2, N6. С.892-900.